High school geometry theorems

Hilbert's axiomatic system.
Formalizovano od strane: Sana Stojanovic Djurdjevic
Dokaz generisan uz pomoć: ArgoGeoChecker.

30.03.2018.

Teorema 1 (th_16_01.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ pokazati da postoji prava p i tačka C tako da važi $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $A \neq B$ postoji prava p tako da važi $A \in p$ i $B \in p$ (aksioma $I1$).
2. Postoje tačka C i tačka D i tačka E tako da važi $\neg col(C, D, E)$ (aksioma $I3b$).
3. Važi $C \in p$ ili $C \notin p$.
    4. Pretpostavimo da važi: $C \in p$.
        5. Važi $D \in p$ ili $D \notin p$.
            6. Pretpostavimo da važi: $D \in p$.
                7. Važi $E \in p$ ili $E \notin p$.
                    8. Pretpostavimo da važi: $E \in p$.
                        9. Na osnovu činjenica $C \in p$ i $D \in p$ i $E \in p$ važi $col(C, D, E)$ (aksioma $D1$).
                        10. Na osnovu činjenica $\neg col(C, D, E)$ i $col(C, D, E)$ dobijamo kontradikciju.
                    11. Pretpostavimo da važi: $E \notin p$.
                        12. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $E \notin p$.
                13. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
            14. Pretpostavimo da važi: $D \notin p$.
                15. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $D \notin p$.
        16. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
    17. Pretpostavimo da važi: $C \notin p$.
        18. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$.
19. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 2 (th_16_02.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ pokazati da postoji tačka D tako da važi $bet(B, C, D)$.*

Dokaz:

1. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
    2. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
        3. Na osnovu činjenica $C \notin p$ i $B = C$ važi $B \notin p$.

4. Na osnovu činjenica $B \notin p$ i $B \in p$ dobijamo kontradikciju.
5. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
6. Na osnovu činjenice $B \neq C$ postoji tačka G tako da važi $bet(B, C, G)$ (aksioma $II2$).
7. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $bet(B, C, G)$.
8. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 3 (th_16_03.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ pokazati da postoji tačka E tako da važi $bet(A, D, E)$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ važi $col(B, D, C)$ i $col(C, B, D)$ i $col(C, D, B)$ i $col(D, B, C)$ i $col(D, C, B)$ (aksioma sym_col).
3. Na osnovu činjenice $A \neq B$ važi $B \neq A$.
4. Na osnovu činjenica $B \neq A$ i $B \in p$ i $A \in p$ i $C \notin p$ važi $\neg col(B, A, C)$ (aksioma $D1a$).
5. Važi $A = D$ ili $A \neq D$.
6. Pretpostavimo da važi: $A = D$.
7. Na osnovu činjenica $\neg col(B, A, C)$ i $A = D$ važi $\neg col(B, D, C)$.
8. Na osnovu činjenica $\neg col(B, D, C)$ i $col(B, D, C)$ dobijamo kontradikciju.
9. Pretpostavimo da važi: $A \neq D$.
10. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji tačka G tako da važi $bet(A, D, G)$ (aksioma $II2$).
11. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $bet(A, D, G)$.
12. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 4 (th_16_04.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ pokazati da važi $\neg col(A, B, D)$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ važi $col(B, D, C)$ i $col(C, B, D)$ i $col(C, D, B)$ i $col(D, B, C)$ i $col(D, C, B)$ (aksioma sym_col).
3. Važi $D \in p$ ili $D \notin p$.
4. Pretpostavimo da važi: $D \in p$.
5. Na osnovu činjenica $B \neq D$ i $B \in p$ i $D \in p$ i $C \notin p$ važi $\neg col(B, D, C)$ (aksioma $D1a$).
6. Na osnovu činjenica $\neg col(B, D, C)$ i $col(B, D, C)$ dobijamo kontradikciju.
7. Pretpostavimo da važi: $D \notin p$.
8. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $D \notin p$ važi $\neg col(A, B, D)$ (aksioma $D1a$).
9. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $\neg col(A, B, D)$.

10. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 5 (th_16_05.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $C \notin p$ *i* $bet(B, C, D)$ *i* $bet(A, D, E)$ *i* $\neg col(A, B, D)$ *pokazati da važi* $E \neq C$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ važi $\neg col(A, B, C)$ (aksioma $D1a$).
2. Na osnovu činjenice $bet(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A, D, E)$ i $bet(E, D, A)$ (aksioma $II1$).
3. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma $II1$).
4. Na osnovu činjenice $bet(D, C, B)$ važi $D \neq C$ i $D \neq B$ i $C \neq B$ i $col(D, C, B)$ i $bet(B, C, D)$ (aksioma $II1$).
5. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji prava r tako da važi $A \in r$ i $D \in r$ (aksioma $I1$).
6. Važi $C = E$ ili $C \neq E$.
   7. Pretpostavimo da važi: $C = E$.
      8. Na osnovu činjenica $A \neq E$ i $C = E$ važi $A \neq C$.
      9. Na osnovu činjenica $A \neq C$ i $C = A$ i $A = C$ važi $C \neq A$.
      10. Na osnovu činjenica $A \neq E$ i $C = E$ važi $A \neq C$.
      11. Na osnovu činjenica $A \neq C$ i $C = A$ i $A = C$ važi $C \neq A$.
      12. Važi $B \in r$ ili $B \notin r$.
         13. Pretpostavimo da važi: $B \in r$.
            14. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $\neg col(A, B, C)$ važi $C \notin r$ (aksioma $D2a$).
            15. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in r$ i $D \in r$ i $C \notin r$ važi $\neg col(A, D, C)$ (aksioma $D1a$).
            16. Na osnovu činjenica $col(A, D, E)$ i $C = E$ važi $col(A, D, C)$.
            17. Na osnovu činjenica $\neg col(A, D, C)$ i $col(A, D, C)$ dobijamo kontradikciju.
         18. Pretpostavimo da važi: $B \notin r$.
            19. Važi $C \in r$ ili $C \notin r$.
               20. Pretpostavimo da važi: $C \in r$.
                  21. Na osnovu činjenica $D \neq E$ i $C = E$ važi $D \neq C$.
                  22. Na osnovu činjenice $D \neq C$ važi $C \neq D$.
                  23. Na osnovu činjenice $C \neq D$ važi $D \neq C$.
                  24. Na osnovu činjenica $D \neq C$ i $D \in r$ i $C \in r$ i $B \notin r$ važi $\neg col(D, C, B)$ (aksioma $D1a$).
                  25. Na osnovu činjenica $\neg col(D, C, B)$ i $col(D, C, B)$ dobijamo kontradikciju.
               26. Pretpostavimo da važi: $C \notin r$.
                  27. Na osnovu činjenica $col(A, D, E)$ i $C = E$ važi $col(A, D, C)$.
                  28. Na osnovu činjenica $\neg col(A, D, C)$ i $col(A, D, C)$ dobijamo kontradikciju.
            29. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
      30. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

31. Pretpostavimo da važi: $C \neq E$.
   32. Na osnovu činjenice $C \neq E$ važi $E \neq C$.
   33. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $E \neq C$.
34. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 6 (th_16_06.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ i $E \neq C$ pokazati da postoji prava q tako da važi $E \in q$ i $C \in q$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $E \neq C$ važi $C \neq E$.
2. Na osnovu činjenice $C \neq E$ postoji prava u tako da važi $C \in u$ i $E \in u$ (aksioma $I1$).
3. Važi $A = C$ ili $A \neq C$.
   4. Pretpostavimo da važi: $A = C$.
      5. Na osnovu činjenica $E \neq C$ i $A = C$ važi $E \neq A$.
      6. Na osnovu činjenica $E \neq A$ i $A = E$ i $E = A$ važi $A \neq E$.
      7. Na osnovu činjenice $E \neq A$ važi $A \neq E$.
      8. Na osnovu činjenice $A \neq E$ postoji prava q tako da važi $A \in q$ i $E \in q$ (aksioma $I1$).
      9. Na osnovu činjenica $A \in q$ i $A = C$ važi $C \in q$.
      10. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in q$ i $C \in q$.
   11. Pretpostavimo da važi: $A \neq C$.
      12. Na osnovu činjenice $A \neq C$ postoji prava q tako da važi $A \in q$ i $C \in q$ (aksioma $I1$).
      13. Važi $A = E$ ili $A \neq E$.
         14. Pretpostavimo da važi: $A = E$.
            15. Na osnovu činjenica $A \in q$ i $A = E$ važi $E \in q$.
            16. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in q$ i $C \in q$.
         17. Pretpostavimo da važi: $A \neq E$.
            18. Na osnovu činjenice $A \neq E$ postoji prava r tako da važi $A \in r$ i $E \in r$ (aksioma $I1$).
            19. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
               20. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
                  21. Na osnovu činjenica $E \neq C$ i $B = C$ važi $E \neq B$.
                  22. Na osnovu činjenica $E \neq B$ i $B = E$ i $E = B$ važi $B \neq E$.
                  23. Na osnovu činjenice $E \neq B$ važi $B \neq E$.
                  24. Na osnovu činjenice $B \neq E$ postoji prava r tako da važi $B \in r$ i $E \in r$ (aksioma $I1$).
                  25. Na osnovu činjenica $B \in r$ i $B = C$ važi $C \in r$.
                  26. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in r$ i $C \in r$.
               27. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
                  28. Na osnovu činjenice $B \neq C$ postoji prava r tako da važi $B \in r$ i $C \in r$ (aksioma $I1$).
                  29. Važi $B = E$ ili $B \neq E$.
                     30. Pretpostavimo da važi: $B = E$.

31. Na osnovu činjenica $B \in r$ i $B = E$ važi $E \in r$.
32. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in r$ i $C \in r$.
33. Pretpostavimo da važi: $B \neq E$.
34. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in u$ i $C \in u$.
35. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
36. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
37. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
38. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 7 (th_16_07.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $C \notin p$ *i* $bet(B, C, D)$ *i* $bet(A, D, E)$ *i* $\neg col(A, B, D)$ *i* $E \neq C$ *i* $E \in q$ *i* $C \in q$ *pokazati da važi* $A \notin q$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A, D, E)$ i $bet(E, D, A)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma $II1$).
3. Na osnovu činjenice $col(A, D, E)$ važi $col(A, E, D)$ i $col(D, A, E)$ i $col(D, E, A)$ i $col(E, A, D)$ i $col(E, D, A)$ (aksioma sym_col).
4. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ važi $col(B, D, C)$ i $col(C, B, D)$ i $col(C, D, B)$ i $col(D, B, C)$ i $col(D, C, B)$ (aksioma sym_col).
5. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ važi $\neg col(A, B, C)$ (aksioma $D1a$).
6. Važi $A \in q$ ili $A \notin q$.
7. Pretpostavimo da važi: $A \in q$.
8. Važi $B \in q$ ili $B \notin q$.
9. Pretpostavimo da važi: $B \in q$.
10. Na osnovu činjenica $A \in q$ i $B \in q$ i $C \in q$ važi $col(A, B, C)$ (aksioma $D1$).
11. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, C)$ i $col(A, B, C)$ dobijamo kontradikciju.
12. Pretpostavimo da važi: $B \notin q$.
13. Važi $D \in q$ ili $D \notin q$.
14. Pretpostavimo da važi: $D \in q$.
15. Na osnovu činjenica $C \neq D$ i $C \in q$ i $D \in q$ i $B \notin q$ važi $\neg col(C, D, B)$ (aksioma $D1a$).
16. Na osnovu činjenica $\neg col(C, D, B)$ i $col(C, D, B)$ dobijamo kontradikciju.
17. Pretpostavimo da važi: $D \notin q$.
18. Na osnovu činjenica $A \neq E$ i $A \in q$ i $E \in q$ i $D \notin q$ važi $\neg col(A, E, D)$ (aksioma $D1a$).
19. Na osnovu činjenica $\neg col(A, E, D)$ i $col(A, E, D)$ dobijamo kontradikciju.
20. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
21. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
22. Pretpostavimo da važi: $A \notin q$.

23. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $A \notin q$.

24. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 8 (th_16_08.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $C \notin p$ *i* $bet(B, C, D)$ *i* $bet(A, D, E)$ *i* $\neg col(A, B, D)$ *i* $E \neq C$ *i* $E \in q$ *i* $C \in q$ *i* $A \notin q$ *pokazati da postoji ravan* α *tako da važi* $A \in \alpha$ *i* $B \in \alpha$ *i* $D \in \alpha$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $\neg col(A, B, D)$ postoji ravan α tako da važi $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ (aksioma $I4a$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$.

QED

Teorema 9 (th_16_09.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $C \notin p$ *i* $bet(B, C, D)$ *i* $bet(A, D, E)$ *i* $\neg col(A, B, D)$ *i* $E \neq C$ *i* $E \in q$ *i* $C \in q$ *i* $A \notin q$ *i* $A \in \alpha$ *i* $B \in \alpha$ *i* $D \in \alpha$ *pokazati da važi* $C \in \alpha$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ postoji prava s tako da važi $B \in s$ i $C \in s$ i $D \in s$ (aksioma $D2$).
3. Na osnovu činjenica $B \neq D$ i $B \in s$ i $D \in s$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ važi $s \in \alpha$ (aksioma $I6$).
4. Na osnovu činjenica $s \in \alpha$ i $C \in s$ važi $C \in \alpha$ (aksioma $D11$).
5. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $C \in \alpha$.

QED

Teorema 10 (th_16_10.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $C \notin p$ *i* $bet(B, C, D)$ *i* $bet(A, D, E)$ *i* $\neg col(A, B, D)$ *i* $E \neq C$ *i* $E \in q$ *i* $C \in q$ *i* $A \notin q$ *i* $A \in \alpha$ *i* $B \in \alpha$ *i* $D \in \alpha$ *i* $C \in \alpha$ *pokazati da važi* $E \in \alpha$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A, D, E)$ i $bet(E, D, A)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma $II1$).
3. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ važi $col(B, D, C)$ i $col(C, B, D)$ i $col(C, D, B)$ i $col(D, B, C)$ i $col(D, C, B)$ (aksioma sym_col).
4. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji prava s tako da važi $A \in s$ i $D \in s$ (aksioma $I1$).
5. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in s$ i $D \in s$ i $A \in \alpha$ i $D \in \alpha$ važi $s \in \alpha$ (aksioma $I6$).
6. Važi $B \in q$ ili $B \notin q$.
   7. Pretpostavimo da važi: $B \in q$.
      8. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in q$ i $C \in q$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $q \in \alpha$ (aksioma $I6$).
      9. Na osnovu činjenica $q \in \alpha$ i $E \in q$ važi $E \in \alpha$ (aksioma $D11$).
   10. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $E \in \alpha$.

11. Pretpostavimo da važi: $B \notin q$.
12. Važi $A = C$ ili $A \neq C$.
13. Pretpostavimo da važi: $A = C$.
14. Na osnovu činjenica $col(C, B, D)$ i $A = C$ važi $col(A, B, D)$.
15. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, D)$ i $col(A, B, D)$ dobijamo kontradikciju.
16. Pretpostavimo da važi: $A \neq C$.
17. Na osnovu činjenice $A \neq C$ postoji prava r tako da važi $A \in r$ i $C \in r$ (aksioma $I1$).
18. Na osnovu činjenica $A \neq C$ i $A \in r$ i $C \in r$ i $A \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $r \in \alpha$ (aksioma $I6$).
19. Važi $B \in r$ ili $B \notin r$.
20. Pretpostavimo da važi: $B \in r$.
21. Važi $D \in r$ ili $D \notin r$.
22. Pretpostavimo da važi: $D \in r$.
23. Važi $E \in r$ ili $E \notin r$.
24. Pretpostavimo da važi: $E \in r$.
25. Na osnovu činjenica $r \in \alpha$ i $E \in r$ važi $E \in \alpha$ (aksioma $D11$).
26. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $E \in \alpha$.
27. Pretpostavimo da važi: $E \notin r$.
28. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in r$ i $D \in r$ i $E \notin r$ važi $\neg col(A, D, E)$ (aksioma $D1a$).
29. Na osnovu činjenica $\neg col(A, D, E)$ i $col(A, D, E)$ dobijamo kontradikciju.
30. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
31. Pretpostavimo da važi: $D \notin r$.
32. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in r$ i $C \in r$ i $D \notin r$ važi $\neg col(B, C, D)$ (aksioma $D1a$).
33. Na osnovu činjenica $\neg col(B, C, D)$ i $col(B, C, D)$ dobijamo kontradikciju.
34. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
35. Pretpostavimo da važi: $B \notin r$.
36. Važi $E \in s$ ili $E \notin s$.
37. Pretpostavimo da važi: $E \in s$.
38. Na osnovu činjenica $s \in \alpha$ i $E \in s$ važi $E \in \alpha$ (aksioma $D11$).
39. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $E \in \alpha$.
40. Pretpostavimo da važi: $E \notin s$.
41. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in s$ i $D \in s$ i $E \notin s$ važi $\neg col(A, D, E)$ (aksioma $D1a$).
42. Na osnovu činjenica $\neg col(A, D, E)$ i $col(A, D, E)$ dobijamo kontradikciju.
43. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
44. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
45. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

46. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 11 (th_16_11.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $C \notin p$ *i* $bet(B, C, D)$ *i* $bet(A, D, E)$ *i* $\neg col(A, B, D)$ *i* $E \neq C$ *i* $E \in q$ *i* $C \in q$ *i* $A \notin q$ *i* $A \in \alpha$ *i* $B \in \alpha$ *i* $D \in \alpha$ *i* $C \in \alpha$ *i* $E \in \alpha$ *pokazati da važi* $q \in \alpha$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $E \neq C$ važi $C \neq E$.
2. Na osnovu činjenica $C \neq E$ i $C \in q$ i $E \in q$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ važi $q \in \alpha$ (aksioma $I6$).
3. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $q \in \alpha$.

QED

Teorema 12 (th_16_12.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $C \notin p$ *i* $bet(B, C, D)$ *i* $bet(A, D, E)$ *i* $\neg col(A, B, D)$ *i* $E \neq C$ *i* $E \in q$ *i* $C \in q$ *i* $A \notin q$ *i* $A \in \alpha$ *i* $B \in \alpha$ *i* $D \in \alpha$ *i* $C \in \alpha$ *i* $E \in \alpha$ *i* $q \in \alpha$ *pokazati da važi* $pash(A, B, D, q, \alpha)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A, D, E)$ i $bet(E, D, A)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma $II1$).
3. Na osnovu činjenice $bet(D, C, B)$ važi $D \neq C$ i $D \neq B$ i $C \neq B$ i $col(D, C, B)$ i $bet(B, C, D)$ (aksioma $II1$).
4. Na osnovu činjenice $bet(E, D, A)$ važi $E \neq D$ i $E \neq A$ i $D \neq A$ i $col(E, D, A)$ i $bet(A, D, E)$ (aksioma $II1$).
5. Na osnovu činjenice $D \neq E$ važi $E \neq D$.
6. Na osnovu činjenice $C \neq D$ važi $D \neq C$.
7. Važi $B \in q$ ili $B \notin q$.
    8. Pretpostavimo da važi: $B \in q$.
        9. Važi $D \in q$ ili $D \notin q$.
            10. Pretpostavimo da važi: $D \in q$.
                11. Na osnovu činjenica $E \neq D$ i $E \in q$ i $D \in q$ i $A \notin q$ važi $\neg col(E, D, A)$ (aksioma $D1a$).
                12. Na osnovu činjenica $\neg col(E, D, A)$ i $col(E, D, A)$ dobijamo kontradikciju.
            13. Pretpostavimo da važi: $D \notin q$.
                14. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in q$ i $C \in q$ i $D \notin q$ važi $\neg col(B, C, D)$ (aksioma $D1a$).
                15. Na osnovu činjenica $\neg col(B, C, D)$ i $col(B, C, D)$ dobijamo kontradikciju.
        16. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
    17. Pretpostavimo da važi: $B \notin q$.
        18. Važi $D \in q$ ili $D \notin q$.
            19. Pretpostavimo da važi: $D \in q$.
                20. Na osnovu činjenica $D \neq C$ i $D \in q$ i $C \in q$ i $B \notin q$ važi $\neg col(D, C, B)$ (aksioma $D1a$).

21. Na osnovu činjenica $\neg col(D,C,B)$ i $col(D,C,B)$ dobijamo kontradikciju.

22. Pretpostavimo da važi: $D \notin q$.

23. Na osnovu činjenica $B \notin q$ i $D \notin q$ i $C \in q$ i $bet(B,C,D)$ važi prava q seče segment BD (aksioma cut_1).

24. Na osnovu činjenica $\neg col(A,B,D)$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $A \notin q$ i $B \notin q$ i $D \notin q$ i prava q seče segment BD važi pash(A,B,D,q,α) (aksioma $pash\_1$).

25. Zaključak teoreme sledi iz činjenice pash(A,B,D,q,α).

26. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

27. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 13 (th_16_13.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B,C,D)$ i $bet(A,D,E)$ i $\neg col(A,B,D)$ i $E \neq C$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $pash(A,B,D,q,\alpha)$ pokazati da važi $D \neq A$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(A,D,E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A,D,E)$ i $bet(E,D,A)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $A \neq D$ važi $D \neq A$.
3. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $D \neq A$.

QED

Teorema 14 (th_16_14.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B,C,D)$ i $bet(A,D,E)$ i $\neg col(A,B,D)$ i $E \neq C$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $pash(A,B,D,q,\alpha)$ i $D \neq A$ pokazati da postoji prava r tako da važi $D \in r$ i $A \in r$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $D \neq A$ važi $A \neq D$.
2. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji prava r tako da važi $A \in r$ i $D \in r$ (aksioma $I1$).
3. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $D \in r$ i $A \in r$.

QED

Teorema 15 (th_16_15.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B,C,D)$ i $bet(A,D,E)$ i $\neg col(A,B,D)$ i $E \neq C$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $pash(A,B,D,q,\alpha)$ i $D \neq A$ i $D \in r$ i $A \in r$ pokazati da važi $r \neq q$.*

Dokaz:

1. Važi $p = q$ ili $p \neq q$.
  2. Pretpostavimo da važi: $p = q$.
    3. Na osnovu činjenica $A \notin q$ i $p = q$ važi $A \notin p$.
    4. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
  5. Pretpostavimo da važi: $p \neq q$.
    6. Važi $q = r$ ili $q \neq r$.
      7. Pretpostavimo da važi: $q = r$.

8. Na osnovu činjenica $A \in r$ i $q = r$ važi $A \in q$.
9. Na osnovu činjenica $A \notin q$ i $A \in q$ dobijamo kontradikciju.
10. Pretpostavimo da važi: $q \neq r$.
11. Na osnovu činjenice $q \neq r$ važi $r \neq q$.
12. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $r \neq q$.
13. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
14. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 16 (th_16_16.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ i $E \neq C$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $pash(A, B, D, q, \alpha)$ i $D \neq A$ i $D \in r$ i $A \in r$ i $r \neq q$ pokazati da važi prava q seče segment AB.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A, D, E)$ i $bet(E, D, A)$ (aksioma $II1$).
2. Na osnovu činjenice $col(A, D, E)$ postoji prava s tako da važi $A \in s$ i $D \in s$ i $E \in s$ (aksioma $D2$).
3. Na osnovu činjenice $r \neq q$ važi $q \neq r$.
4. Na osnovu činjenice pash(A, B, D, q, α) važi prava q seče segment DA ili prava q seče segment AB (aksioma $II4$).
5. Pretpostavimo da važi: prava q seče segment DA.
6. Na osnovu činjenice prava q seče segment DA postoji tačka F tako da važi $D \notin q$ i $A \notin q$ i $F \in q$ i $bet(D, F, A)$ (aksioma cut_2).
7. Na osnovu činjenice $bet(D, F, A)$ važi $D \neq F$ i $D \neq A$ i $F \neq A$ i $col(D, F, A)$ i $bet(A, F, D)$ (aksioma $II1$).
8. Na osnovu činjenica $D \neq F$ i $D \neq A$ i $F \neq A$ i $bet(D, F, A)$ važi $\neg bet(F, A, D)$ i $\neg bet(A, D, F)$ (aksioma $II3$).
9. Na osnovu činjenice $col(D, F, A)$ važi $col(D, A, F)$ i $col(F, D, A)$ i $col(F, A, D)$ i $col(A, D, F)$ i $col(A, F, D)$ (aksioma sym_col).
10. Na osnovu činjenice $D \neq A$ važi $A \neq D$.
11. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in r$ i $D \in r$ i $A \in s$ i $D \in s$ važi $r = s$ (aksioma $I2$).
12. Na osnovu činjenice $col(A, D, F)$ postoji prava u tako da važi $A \in u$ i $D \in u$ i $F \in u$ (aksioma $D2$).
13. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in r$ i $D \in r$ i $A \in u$ i $D \in u$ važi $r = u$ (aksioma $I2$).
14. Važi $E = F$ ili $E \neq F$.
15. Pretpostavimo da važi: $E = F$.
16. Na osnovu činjenica $\neg bet(A, D, F)$ i $E = F$ važi $\neg bet(A, D, E)$.
17. Na osnovu činjenica $\neg bet(A, D, E)$ i $bet(A, D, E)$ dobijamo kontradikciju.
18. Pretpostavimo da važi: $E \neq F$.
19. Na osnovu činjenica $E \in s$ i $r = s$ i $r = u$ važi $E \in r$.
20. Na osnovu činjenica $F \in u$ i $r = s$ i $r = u$ važi $F \in r$.
21. Na osnovu činjenica $E \neq F$ i $E \in q$ i $F \in q$ i $E \in r$ i $F \in r$ važi $q = r$ (aksioma $I2$).

22. Na osnovu činjenica $q \neq r$ i $q = r$ dobijamo kontradikciju.
23. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
24. Pretpostavimo da važi: prava q seče segment AB.
25. Zaključak teoreme sledi iz činjenice prava q seče segment AB.
26. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 17 (th_16_17.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ i $E \neq C$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $pash(A, B, D, q, \alpha)$ i $D \neq A$ i $D \in r$ i $A \in r$ i $r \neq q$ i prava q seče segment AB pokazati da postoji tačka F tako da važi $bet(A, F, B)$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prava q seče segment AB postoji tačka F tako da važi $A \notin q$ i $B \notin q$ i $F \in q$ i $bet(A, F, B)$ (aksioma *cut_2*).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $bet(A, F, B)$.

QED
