

# High school geometry theorems

Hilbert's axiomatic system.

Formalizovano od strane: Sana Stojanovic Djurdjevic

Dokaz generisan uz pomoć: ArgoGeoChecker.

30.03.2018.

**Teorema 1 (th\_12.01.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku pokazati da postoji tačka  $B$  tako da važi  $B \in r$  i  $B \in p$ .*

*Dokaz:*

1. Na osnovu činjenice prave  $r$  i  $p$  se seku postoji tačka  $B$  tako da važi  $r \neq p$  i  $B \in r$  i  $B \in p$  (aksioma D6).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica  $B \in r$  i  $B \in p$ .

QED

**Teorema 2 (th\_12.02.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku i  $B \in r$  i  $B \in p$  pokazati da postoji tačka  $C$  tako da važi  $C \in s$  i  $C \in p$ .*

*Dokaz:*

1. Na osnovu činjenice prave  $s$  i  $p$  se seku postoji tačka  $C$  tako da važi  $s \neq p$  i  $C \in s$  i  $C \in p$  (aksioma D6).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica  $C \in s$  i  $C \in p$ .

QED

**Teorema 3 (th\_12.03.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku i  $B \in r$  i  $B \in p$  i  $C \in s$  i  $C \in p$  pokazati da postoji tačka  $D$  tako da važi  $D \in r$  i  $D \in q$ .*

*Dokaz:*

1. Na osnovu činjenice prave  $r$  i  $q$  se seku postoji tačka  $D$  tako da važi  $r \neq q$  i  $D \in r$  i  $D \in q$  (aksioma D6).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica  $D \in r$  i  $D \in q$ .

QED

**Teorema 4 (th\_12.04.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku i  $B \in r$  i  $B \in p$  i  $C \in s$  i  $C \in p$  i  $D \in r$  i  $D \in q$  pokazati da postoji tačka  $E$  tako da važi  $E \in s$  i  $E \in q$ .*

*Dokaz:*

1. Na osnovu činjenice prave  $s$  i  $q$  se seku postoji tačka  $E$  tako da važi  $s \neq q$  i  $E \in s$  i  $E \in q$  (aksioma D6).

2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica  $E \in s$  i  $E \in q$ .

QED

**Teorema 5 (th\_12.05.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku i  $B \in r$  i  $B \in p$  i  $C \in s$  i  $C \in p$  i  $D \in r$  i  $D \in q$  i  $E \in s$  i  $E \in q$  pokazati da važi  $\neg \text{col}(A, B, C)$ .*

*Dokaz:*

1. Važi  $A = B$  ili  $A \neq B$ .
2. Pretpostavimo da važi:  $A = B$ .
3. Na osnovu činjenica  $B \in p$  i  $A = B$  važi  $A \in p$ .
4. Na osnovu činjenica  $A \notin p$  i  $A \in p$  dobijamo kontradikciju.
5. Pretpostavimo da važi:  $A \neq B$ .
6. Važi  $B = C$  ili  $B \neq C$ .
7. Pretpostavimo da važi:  $B = C$ .
8. Na osnovu činjenica  $C \in s$  i  $B = C$  važi  $B \in s$ .
9. Na osnovu činjenica  $A \neq B$  i  $A \in r$  i  $B \in r$  i  $A \in s$  i  $B \in s$  važi  $r = s$  (aksioma I2).
10. Na osnovu činjenica  $r \neq s$  i  $r = s$  dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi:  $B \neq C$ .
12. Na osnovu činjenica  $B \neq C$  i  $B \in p$  i  $C \in p$  i  $A \notin p$  važi  $\neg \text{col}(B, C, A)$  (aksioma D1a).
13. Na osnovu činjenice  $\neg \text{col}(B, C, A)$  važi  $\neg \text{col}(B, A, C)$  i  $\neg \text{col}(C, B, A)$  i  $\neg \text{col}(C, A, B)$  i  $\neg \text{col}(A, B, C)$  i  $\neg \text{col}(A, C, B)$  (aksioma sym\_ncol).
14. Zaključak teoreme sledi iz činjenice  $\neg \text{col}(A, B, C)$ .
15. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
16. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

**Teorema 6 (th\_12.06.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku i  $B \in r$  i  $B \in p$  i  $C \in s$  i  $C \in p$  i  $D \in r$  i  $D \in q$  i  $E \in s$  i  $E \in q$  i  $\neg \text{col}(A, B, C)$  pokazati da postoji ravan  $\alpha$  tako da važi  $A \in \alpha$  i  $B \in \alpha$  i  $C \in \alpha$ .*

*Dokaz:*

1. Na osnovu činjenice  $\neg \text{col}(A, B, C)$  postoji ravan  $\alpha$  tako da važi  $A \in \alpha$  i  $B \in \alpha$  i  $C \in \alpha$  (aksioma I4a).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica  $A \in \alpha$  i  $B \in \alpha$  i  $C \in \alpha$ .

QED

**Teorema 7 (th\_12.07.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku i  $B \in r$  i  $B \in p$  i  $C \in s$  i  $C \in p$  i  $D \in r$  i  $D \in q$  i  $E \in s$  i  $E \in q$  i  $\neg \text{col}(A, B, C)$  i  $A \in \alpha$  i  $B \in \alpha$  i  $C \in \alpha$  pokazati da važi  $r \in \alpha$  i  $s \in \alpha$ .*

*Dokaz:*

1. Važi  $A = B$  ili  $A \neq B$ .
2. Pretpostavimo da važi:  $A = B$ .

3. Na osnovu činjenica  $B \in p$  i  $A = B$  važi  $A \in p$ .
4. Na osnovu činjenica  $A \notin p$  i  $A \in p$  dobijamo kontradikciju.
5. Pretpostavimo da važi:  $A \neq B$ .
6. Na osnovu činjenica  $A \neq B$  i  $A \in r$  i  $B \in r$  i  $A \in \alpha$  i  $B \in \alpha$  važi  $r \in \alpha$  (aksioma I6).
7. Važi  $A = C$  ili  $A \neq C$ .
8. Pretpostavimo da važi:  $A = C$ .
9. Na osnovu činjenica  $C \in p$  i  $A = C$  važi  $A \in p$ .
10. Na osnovu činjenica  $A \notin p$  i  $A \in p$  dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi:  $A \neq C$ .
12. Na osnovu činjenica  $A \neq C$  i  $A \in s$  i  $C \in s$  i  $A \in \alpha$  i  $C \in \alpha$  važi  $s \in \alpha$  (aksioma I6).
13. Zaključak teoreme sledi iz činjenica  $r \in \alpha$  i  $s \in \alpha$ .
14. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
15. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

---

**Teorema 8 (th\_12.08.)** *Pod pretpostavkom da važi  $A \notin p$  i  $A \notin q$  i  $r \neq s$  i  $A \in r$  i  $A \in s$  i prave  $r$  i  $p$  se seku i prave  $r$  i  $q$  se seku i prave  $s$  i  $p$  se seku i prave  $s$  i  $q$  se seku i  $B \in r$  i  $B \in p$  i  $C \in s$  i  $C \in p$  i  $D \in r$  i  $D \in q$  i  $E \in s$  i  $E \in q$  i  $\neg \text{col}(A, B, C)$  i  $A \in \alpha$  i  $B \in \alpha$  i  $C \in \alpha$  i  $r \in \alpha$  i  $s \in \alpha$  pokazati da važi  $p \in \alpha$  i  $q \in \alpha$ .*

*Dokaz:*

1. Na osnovu činjenica  $r \in \alpha$  i  $D \in r$  važi  $D \in \alpha$  (aksioma D11).
2. Na osnovu činjenica  $s \in \alpha$  i  $E \in s$  važi  $E \in \alpha$  (aksioma D11).
3. Na osnovu činjenica  $A \in r$  i  $B \in r$  i  $B \in r$  važi  $\text{col}(A, B, B)$  (aksioma D1).
4. Važi  $A = D$  ili  $A \neq D$ .
5. Pretpostavimo da važi:  $A = D$ .
6. Na osnovu činjenica  $D \in q$  i  $A = D$  važi  $A \in q$ .
7. Na osnovu činjenica  $A \notin q$  i  $A \in q$  dobijamo kontradikciju.
8. Pretpostavimo da važi:  $A \neq D$ .
9. Važi  $B = C$  ili  $B \neq C$ .
10. Pretpostavimo da važi:  $B = C$ .
11. Na osnovu činjenica  $\text{col}(A, B, B)$  i  $B = C$  važi  $\text{col}(A, B, C)$ .
12. Na osnovu činjenica  $\neg \text{col}(A, B, C)$  i  $\text{col}(A, B, C)$  dobijamo kontradikciju.
13. Pretpostavimo da važi:  $B \neq C$ .
14. Na osnovu činjenica  $B \neq C$  i  $B \in p$  i  $C \in p$  i  $B \in \alpha$  i  $C \in \alpha$  važi  $p \in \alpha$  (aksioma I6).
15. Važi  $D = E$  ili  $D \neq E$ .
16. Pretpostavimo da važi:  $D = E$ .
17. Na osnovu činjenica  $E \in s$  i  $D = E$  važi  $D \in s$ .
18. Na osnovu činjenica  $A \neq D$  i  $A \in r$  i  $D \in r$  i  $A \in s$  i  $D \in s$  važi  $r = s$  (aksioma I2).
19. Na osnovu činjenica  $r \neq s$  i  $r = s$  dobijamo kontradikciju.
20. Pretpostavimo da važi:  $D \neq E$ .

21. Na osnovu činjenica  $D \neq E$  i  $D \in q$  i  $E \in q$  i  $D \in \alpha$  i  $E \in \alpha$  važi  $q \in \alpha$  (aksioma I6).
22. Zaključak teoreme sledi iz činjenica  $p \in \alpha$  i  $q \in \alpha$ .
23. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
24. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
25. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
- QED
-